Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

Г. Е. ШИЛОВ

ПРОСТАЯ ГАММА

УСТРОЙСТВО МУЗЫКАЛЬНОЙ ШКАЛЫ

ФМ

АН
КНИГИ
НИКИТИНА

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 37

Г. Е. ШИЛОВ

ПРОСТАЯ ГАММА

УСТРОЙСТВО МУЗЫКАЛЬНОЙ ШКАЛЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

517.2
Ш 59

АННОТАЦИЯ

В основе музыки лежит музыкальный тон, или звук, определенной высоты, представляющий собой колебательный процесс в воздухе с некоторой частотой. Хотя наше ухо воспринимает тоны с достаточно широким диапазоном частот, в музыке мы пользуемся сравнительно небольшим числом тонов.

Вопрос о том, какие именно тоны должна содержать музыкальная шкала, решается математическими методами. Этому и посвящена настоящая брошюра, в основу которой легла лекция прочитанная автором в школьном математическом кружке при МГУ.

Георгий Евгеньевич Шилов.

Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).

М., Физматгиз, 1963 г., 20 стр. с илл

(Серия: «Популярные лекции по математике»).

Редактор *С. А. Широкова.*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод.* Корректор *М. Ф. Алексеева*

Сдано в набор 25 II 1963 г. Подписано к печати 9/IV 1963 г. Бумага 84×108$^{1}/_{32}$
Физ. печ. л. 0,625. Усл. печ. л. 1,03. Уч.-изд. л. 0,94.
Тираж 43000 экз. Т 04928. Цена книги 3 коп. Заказ № 181.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского совнархоза. Москва, Ж-54, Валовая, 28.

Отпечатано с матриц в гос. типографии «Вайздас»,
Вильнюс, ул. Страздялио 1. Заказ № 1795.

Сальери . . . . . Для меня
Так это ясно, как простая гамма.

Пушкин, *Моцарт и Сальери.*

В основе всей музыки лежит музыкальный тон, или звук определенной высоты. Рассматриваемый с физической точки зрения, музыкальный тон есть колебательный процесс в воздухе с некоторой фиксированной частотой. Например, тон «ля$_1$» соответствует процессу с частотой 440 герц (колебаний в секунду) [1]). А вообще наше ухо способно воспринимать тоны в широкой полосе частот от 16 до 20 000 герц,

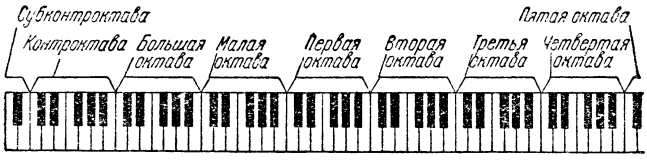

Рис. 1.

причем в области до 4000 герц способно отличить по высоте тоны, различающиеся всего на одно колебание в секунду.

Тем не менее для музыки используется лишь весьма небольшое число тонов. Взглянем на клавиатуру фортепиано (рис. 1). Мы увидим всего 90 белых и черных клавиш. Нажимая их, мы сможем извлечь только 90 различных

[1]) Согласно международному стандарту. Существует легенда, что в незапамятные времена около древнеегипетского города Фивы каждое утро на рассвете этот звук издавала огромная статуя, известная под именем колосса Мемнона, и фивские музыканты приходили к ней настраивать свои инструменты. Колосс Мемнона перестал звучать в начале нашей эры и проверить истинность легенды сейчас невозможно.

звуков — тонов разной высоты. Какие же именно эти тоны? Вот таблица частот для среднего, наиболее употребительного участка в диапазоне фортепиано — первой октавы (рис. 2):

тон	$до_1$	$ре_1$	$ми_1$	$фа_1$	$соль_1$	$ля_1$	$си_1$	$до_2$
Частота в герцах	262	294	330	349	392	440	494	523

На первый взгляд, частоты этих тонов образуют причудливую последовательность, в которой, кроме ее возрастания, трудно уловить какую-либо закономерность. К тому же, за исключением числа 440, остальные из указанных частот выражаются в действительности вовсе не целыми числами, а иррациональными; в таблице же даны их округления до ближайших целых чисел. Так, частота, отвечающая тону $ми_1$, на самом деле не 330, а 329,63 ... и т. д.

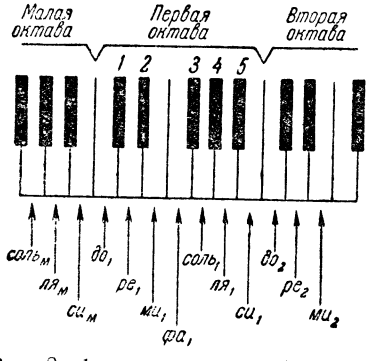

Рис. 2. *1* — до диез = ре бемоль, *2* — ре диез = ми бемоль, *3* — фа диез = соль бемоль, *4* — соль диез = ля бемоль, *5* — ля диез = си бемоль.

Почему же именно эти тоны выбраны для музыкальной шкалы? Вопрос, какие тоны следует положить в основу музыки, возник еще в древности, но окончательное решение получил сравнительно недавно, в начале XVIII века. Вопрос этот, может быть, и не возник бы, если бы на всех музыкальных инструментах можно было получать звуки любой высоты, без пропусков. На многих музыкальных инструментах — на скрипке, виолончели — действительно, можно получить любой тон (в пределах диапазона инструмента). Но имеются и инструменты, конструкция которых допускает лишь сравнительно небольшой фиксированный набор возможных тонов — орган, фортепиано, арфа; а увеличивать набор допустимых тонов означало бы сильно усложнить конструкцию инструментов. Мы видим, что по технической необхо-

димости музыкальная шкала должна содержать только сравнительно небольшое число тонов; и мы желаем выяснить, какие именно тоны следует включить в эту шкалу.

Здесь положение не такое простое, как при построении, например, температурной шкалы, где отмечают точки затвердевания и кипения воды и делят получившийся интервал на 100 равных частей. В музыке огромную роль играют созвучия — одновременные звучания нескольких звуков разной высоты. Но далеко не любые сочетания звуков благозвучны. Поэтому в музыкальную шкалу желательно включить вместе с данным звуком такие, которые звучат одновременно с ним наиболее естественно. Эти соображения пока еще несколько неопределенны; но дальше будет ясно, что именно имеется в виду.

Инструменты, подобные арфе (лира, кифара), были известны в далекой древности. Источниками звуков в этих инструментах, так же как и в фортепиано, являются струны. Возможно, что уже в древности производились эксперименты со струнами, похожие на тот, который мы сейчас опишем в применении к фортепиано. На струнах фортепиано в исходном положении лежат демпферы — оклеенные войлоком колодочки, которые не дают струнам звучать. При нажатии клавиши вначале отводится демпфер, освобождая струну, а затем по струне ударяет молоточек. Если клавишу оставить нажатой, то свободная струна будет звучать долго; если же клавишу отпустить, демпфер упадет на струну и прекратит ее звучание. Если нажимать клавишу медленно, то демпфер освободит струну, но молоточек не ударится о нее, и мы не услышим ее звучания. Теперь произведем следующий опыт. Медленно нажмем клавишу *ля*$_1$, соответствующую тону частоты 440 герц, с тем чтобы освободить соответствующую струну без звука. Затем ударим клавишу *ля*$_м$ (малой октавы) и сразу ее отпустим. Мы услышим короткое звучание струны *ля*$_м$ (220 герц), которое прекратится, когда клавиша вернется на место. Но после этого мы будем слышать звук освобожденной нами струны *ля*$_1$. Освобожденная струна *ля*$_1$ начала звучать «сама» вследствие резонанса со звучавшей струной *ля*$_м$. Это показывает, что колебание струны более сложный процесс, чем это кажется на первый взгляд. Струна с основной частотой 220 герц производит колебания также и с частотой 440 герц, которые и возбуждают путем резонанса струну, настроенную на эту частоту. Этот эксперимент можно повторять на разных

струнах фортепиано и других музыкальных инструментов, и всегда будет один и тот же результат: струна с основной частотой, положим, f герц, более или менее сильно излучает также и звук с частотой $2f$ герц [1]). Это же явление наблюдается в той или иной степени и в других музыкальных инструментах — духовых, ударных (за исключением одного-единственного — камертона, излучающего практически чистый тон без призвуков).

Как мы уже говорили, музыкальную шкалу естественно строить так, чтобы входящие в нее тоны были наиболее «созвучны» друг с другом. Тон двойной частоты весьма «созвучен» с тоном исходной частоты (струна звучит как единое целое, и только специальные эксперименты позволяют выделить из ее звучания тон двойной частоты).

Поэтому естественно ввести следующее условие: *музыкальная шкала вместе с частотой f должна содержать частоту $2f$*. Если же говорить о частотах, меньших чем f, то в первую очередь естественно требовать, чтобы *вместе с частотой f* на шкале была и частота $f/2$. Интервал между данным звуком и звуком двойной частоты называется *октавой*. Он довольно широк; запев «Песни о Родине» Дунаевского: «От Москвы до самых до окраин» начинается с интервала октавы. Для музыки одних октавных интервалов явно недостаточно. Далее мы продолжим наши эксперименты со струной с тем чтобы найти другие тоны, созвучные с основным ее тоном. Но вначале рассмотрим еще одно общее соображение, которое желательно было бы также учесть при построении музыкальной шкалы. Именно, нужно обеспечить возможность воспроизводить данную нам мелодию по желанию выше или ниже, чем в оригинале. Все знают, например,

---

[1]) Тот факт, что колебание однородной струны представляет собой наложение колебаний с частотами f, $2f$, $3f$, ..., можно обосновать и теоретически, но это требует средств высшей математики. Можно вычислить и амплитуды отдельных составляющих. Например, если молоточек ударяет по струне длины l на расстоянии h от ее конца, то отношение амплитуды возбуждаемого этим ударом тона частоты $2f$ и амплитуды тона частоты f равно $\frac{1}{4}\,\frac{\sin(2h\pi/l)}{1+\sin(h\pi/l)}$. Только в единственном случае, когда удар приходится точно посредине струны ($h=l/2$), звук частоты $2f$ не излучается. Но в этом случае (как и в других) излучается звук частоты $3f$ и т. д. В фортепиано удар молоточка приходится на 1/8 длины струны. Эта точка близка к той, где получается максимум относительной амплитуды тона частоты $2f$, но не совпадает с ней, поскольку конструкторы учитывают также роль частот $3f$, $4f$ и т. д.

что одну и ту же песню можно петь по-разному, выше или ниже, смотря по характеру голоса; тенору удобно петь выше, басу — ниже. Мелодия, если отвлечься от ее ритма, описывается последовательными интервалами между составляющими ее тонами. Для интервала характерно *отношение* частот звуков, образующих интервал; как мы уже видели, в интервале «октава» это отношение равно 2. Перенести мелодию выше — это значит воспроизвести ее иными звуками, соответственно более высокими, но с точным сохранением отношений частот тонов в каждом интервале. Например, если мы играем мелодию «чижика» в оригинале (*ми — до — ми — до — фа — ми — ре*), в первой октаве, то последовательные частоты (в герцах), используемые нами, следующие:

$$330 — 262 — 330 — 262 — 349 — 330 — 294.$$

Если мы перенесем эту мелодию на три клавиши выше (*си — соль — си — соль — до — си — ля*), то на слух мелодия не исказится. Последовательные частоты будут такими:

$$494 — 392 — 494 — 392 — 523 — 494 — 440.$$

Нетрудно проверить, что отношения частот в каждом из интервалов мелодии сохранились:

$$\frac{330}{262} = \frac{494}{392}, \qquad \frac{349}{262} = \frac{523}{392} \text{ и т. д.}$$

Если бы нам пришлось использовать интервалы с иным отношением, чем в оригинале, мы на слух заметили бы, что мелодия исказилась. В частности, если перенести «чижика» только на одну клавишу выше и попробовать играть *фа — ре — фа — ре — соль — фа — ми*, т. е. на частотах

$$349 — 294 — 349 — 294 — 392 — 349 — 330,$$

то на слух характер мелодии явно искажается; если же подсчитать отношения частот, мы увидим, что

$$\frac{330}{262} \neq \frac{349}{294} \text{ и т. д.}$$

В действительности «чижик» можно начать с *фа*, но придется использовать черные клавиши; об этом мы скажем ниже.

Теперь предположим, что мы построили шкалу тонов, удовлетворяющую двум условиям:

а) *вместе с каждым тоном f на шкале имеются тоны* $2f$ *и* $\frac{1}{2}f$;

б) *шкала допускает возможность переноса мелодий без искажений.*

Пусть в пределах одной октавы тоны шкалы следующие:

$$f = f_0 < f_1 < f_2 < \ldots < f_{m-1} < f_m = 2f.$$

Сами эти звуки уже образуют простейшую мелодию. Перенесем ее вверх без искажения так, чтобы нижний тон поднялся с f_0 на f_1.

Новая мелодия будет начинаться со звука f_1 и будет кончаться некоторым звуком f_{m+1}, который должен быть октавным повторением звука f_1 (поскольку $f_m = 2f_0$). Звук f_{m+1} уже выше последнего звука октавы (f_0, f_m), но мы утверждаем, что он является первым, следующим за f_m. Действительно, если бы на нашей шкале имелся тон f' между f_m и $f_{m+1} = 2f_1$, то на этой же шкале имелся бы и тон $\frac{1}{2}f'$, причем из неравенства $f_m < f' < f_{m+1}$ следовало бы, что

$$f_0 < \frac{1}{2}f' < f_1.$$

Но, по условию, f_1 есть *первый* звук, следующий за f_0, поэтому никакого f' между f_m и f_{m+1} быть не может.

После переноса на одну ступеньку наша мелодия, по условию, может быть изображена с помощью тонов той же шкалы, начиная от f_1 и кончая f_{m+1}. Поскольку исходная мелодия состоит из $m+1$ различных звуков, а от f_1 до f_{m+1} на нашей шкале имеется ровно $m+1$ различных тонов: $f_1, f_2, \ldots, f_m, f_{m+1}$, новая мелодия имеет вид

$$f_1 < f_2 < \ldots < f_m < f_{m+1}.$$

Так как она соответствует исходной мелодии без искажений, мы имеем

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1}, \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2}, \ldots, \quad \frac{f_m}{f_{m-1}} = \frac{f_{m+1}}{f_m},$$

или, что то же,

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \ldots = \frac{f_m}{f_{m-1}} = \frac{f_{m+1}}{f_m}. \tag{1}$$

Мы видим, что частоты $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m$ образуют *геометрическую прогрессию.* Найдем знаменатель этой прогрессии. Обозначим его через q; тогда мы имеем $f_m = q^m f_0 = 2f_0$;

таким образом, $q^m = 2$. Сама шкала полностью определяется, если известно число m — число ее ступенек между частотой f_0 и частотой $2f_0$.

Для удобства дальнейших построений перейдем от частот f_0, f_1, ... к их двоичным логарифмам $\lg_2 f_0$, $\lg_2 f_1$, ... Октава $(f_0, 2f_0)$ перейдет при этом в промежуток от $\lg_2 f_0$ до $\lg_2 2f_0 = \lg_2 f_0 + 1$, т. е. в промежуток длины 1, а геометрическая прогрессия $f_0, f_1, \ldots, f_m$ перейдет в арифметическую прогрессию $\lg_2 f_0$, $\lg_2 f_1, \ldots, \lg_2 f_m$ с разностью $\lg_2 \sqrt[m]{2} = \frac{1}{m}$; таким образом, на оси логарифмов наша шкала будет состоять из точек A, $A + \frac{1}{m}$, $A + \frac{2}{m}, \ldots, A + 1$, где через A мы обозначили величину $\lg_2 f_0$.

Из каких же соображений следует выбирать число m?

Мы вновь обратимся к экспериментам со струной, чтобы выяснить, какие еще звуковые частоты излучаются при ее колебаниях. Проверим, естественно, наличие тройной частоты. Для этого используем клавишу «ля$_м$» (малой октавы), соответствующую частоте 220 герц, и клавишу «ми$_2$» (второй октавы), соответствующую частоте 660 герц (октавное повторение частоты 330 герц, соответствующей тону *ми*$_1$ первой октавы). Медленно нажмем *ми*$_2$ (без звука), освобождая струну от демпфера; затем, как и раньше, сильно нажимаем клавишу *ля*$_м$ и отпускаем ее; вслед за этим *мы слышим звучание освобожденной струны ми*$_2$. Итак, *тройная частота также присутствует в звучании струны*. Можно продолжать опыт и дальше и обнаружить последовательно присутствие тонов четвертой кратности, что, впрочем, уже неудивительно, поскольку $4f = 2 \cdot 2f$; далее — пятой кратности и т. д.; но последующие тоны, после третьего, уже весьма слабо выражены. Все эти тоны $2f$, $3f$, $4f$, ... называются *обертонами* основного тона f; их совместное звучание придает звуку струны характерный тембр, который позволяет нам отличить звук, взятый на фортепиано, от того же звука, взятого на трубе или на скрипке. Красота певческого голоса зависит от количества и относительного значения обертонов. Камертон, дающий только основной тон без обертонов, имеет наиболее «скучный» тембр, и, может быть, поэтому не применяется в художественной музыке.

Теперь, естественно, вводим далее следующее условие:

в) *вместе с каждой частотой f в музыкальной шкале должна присутствовать частота $3f$.*

Поскольку мы ранее условились, что вместе с каждой частотой f на шкале должна присутствовать $\frac{1}{2}f$, то мы видим, что вместе с частотой f должна присутствовать $\frac{1}{2}3f=\frac{3}{2}f$. Эта частота интересует нас потому, что она заключена как раз в том промежутке $(f,\ 2f)$, в котором мы строим нашу шкалу. Итак, число m ступенек в одной октаве $f_0,\ 2f_0$ должно быть выбрано так, чтобы одна из получившихся ступенек совпала с частотой $\frac{3}{2}f_0$. Логарифм частоты k-й ступеньки есть $A+\frac{k}{m}$, логарифм частоты $\frac{3}{2}f_0$ есть $A+\lg_2\frac{3}{2}$.

Отсюда получаем уравнение

$$\lg_2\frac{3}{2}=\frac{k}{m}, \tag{2}$$

которое должно быть удовлетворено при каких-то целых k и m. Но легко убедиться, что *это уравнение вовсе не имеет решений в целых числах;* иначе говоря, $\lg_2\frac{3}{2}$ есть число *иррациональное*. Действительно, по определению логарифма из (2) мы выводим

$$2^{\frac{k}{m}}=\frac{3}{2},$$

или, возводя в степень m,

$$2^k=\left(\frac{3}{2}\right)^m,\quad 2^{k+m}=3^m.$$

Но левая часть полученного равенства при любых целых k и m есть число четное, в то время как правая часть — число нечетное. Таким образом, наш принцип привел нас к противоречию: *условие равномерности логарифмической шкалы тонов несовместимо с требованием наличия в шкале частоты* $\frac{3}{2}f$ *вместе с частотой* f. Интервал $\left(f,\ \frac{3}{2}f\right)$ называется *чистой квинтой;* мы видим, что в равномерной логарифмической шкале тонов чистые квинты неосуществимы.

Выходит, от чего-то нужно отказываться — или от равномерности шкалы, или от чистых квинт. Равномерность шкалы

необходима для обеспечения неискаженного перевода мелодии вверх или вниз и ею мы не хотели бы поступиться. Легче отказаться от чистых квинт: мы можем постараться провести лестницу из рациональных чисел $\frac{k}{m}$ так близко к иррациональному числу $\lg_2 \frac{3}{2}$, что разность соответствующих частот будет менее 1 герца и тем самым на слух не ощутимой. Прикинем необходимую точность вычислений. Вся первая октава есть интервал от 262 до 523 герц, следовательно, общей длины порядка 260 герц, и на логарифмической шкале она отвечает промежутку длины 1; таким образом, 1 герц соответствует приблизительно 0,004 на логарифмической шкале; мы должны обеспечить разрыв между числами $\frac{k}{m}$ и $\lg_2 \frac{3}{2} = 0{,}585\ldots$ меньший, чем в половину второго знака после запятой.

Кроме квинты $\frac{3}{2}f$, есть и еще точки на интервале $(f, 2f)$, в которых желательно было бы иметь музыкальные ступеньки. Анализ более или менее устоявшихся примеров народной музыки [1]) показал, что там чаще всего встречаются интервалы, выражаемые с помощью следующих отношений частот:

2 (октава), 3/2 (квинта), 5/4 (терция), 4/3 (кварта), 5/3 (секста), 9/8 (секунда), 15/8 (септима).

Выпишем соответствующие значения двоичных логарифмов:

$$\lg_2 2 = 1, \quad \lg_2 \frac{3}{2} = 0{,}585, \quad \lg_2 \frac{4}{3} = 0{,}416,$$

$$\lg_2 \frac{5}{3} = 0{,}737, \quad \lg_2 \frac{5}{4} = 0{,}323, \quad \lg_2 \frac{9}{8} = 0{,}169, \lg_2 \frac{15}{8}$$ [2]).

---

[1]) Эти же отношения естественно получаются и из теоретических соображений. Терция 5/4 есть представитель пятикратного основного тона, кварта 4/3 есть квинта вниз от 2, секста 5/3—квинта вниз от $5/2 = 2 \cdot 5/4$, секунда $9/8 = 1/2 \cdot 3/2 \cdot 3/2$, т. е. представитель двойной квинты; наконец, септима 15/8 есть квинта вверх от терции.

[2]) Если нет под рукой таблиц двоичных логарифмов, можно вычислять их через десятичные, логарифмируя по основанию 10 формулу $2^{\lg_2 x} = x$; мы получаем $\lg_2 x \cdot \lg_{10} 2 = \lg_{10} x$, откуда

$$\lg_2 x = \frac{\lg_{10} x}{\lg_{10} 2}.$$

Нам желательно провести равномерную шкалу по возможности ближе к этим числам; при этом наибольшее значение имеет число $\lg_2 \frac{3}{2} = 0{,}585$, как отвечающее самому естественному интервалу в пределах октавы.

Для построения рациональных приближений иррациональных чисел очень хорошим средством является *цепная дробь*, т. е. дробь вида

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}, \tag{3}$$

где $a_1, a_2, \dots$ — целые положительные числа.

Известно, что всякое число α на отрезке $[0,1]$ может быть разложено в цепную дробь (бесконечную, если α иррационально). Выражения, очевидно рациональные,

$$\frac{1}{a_1}, \quad \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \quad \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} \quad \text{и т. д.}$$

называются *подходящими дробями* цепной дроби (3). Подходящая дробь цепной дроби, составленной для числа α,

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_s}}} = \frac{p_n}{q_n},$$

отстоит от числа α не дальше, чем на $\frac{1}{q_n^2}$ и не дальше, чем любая дробь $\frac{p}{q}$ со знаменателем, не превосходящим q_n. Подробное изложение теории цепных дробей можно найти, например, в Энциклопедии Элементарной Математики (т. I, статья А. Я. Хинчина).

Найдем первые подходящие дроби разложения числа $x = \lg_2 \frac{3}{2}$ в цепную дробь. По определению логарифма имеем

$$2^x = \frac{3}{2}. \tag{4}$$

Так как $x<1$, то при подстановке $y=\frac{1}{x}$ будем иметь $y>1$. Уравнение (4) преобразуется к виду

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{y}=2. \tag{5}$$

Очевидно, что искомое значение y лежит между 1 и 2 (поскольку $\left(\frac{3}{2}\right)^{1}=\frac{3}{2}<2$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}>2$). Мы положим теперь $y=1+\frac{1}{z}$; при этом заведомо $\frac{1}{z}<1$, $z>1$. Уравнение (5) преобразуется к виду

$$\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}}=2, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}}=\frac{4}{3},$$

откуда

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{z}=\frac{3}{2}. \tag{6}$$

Очевидно, неизвестное z находится между 1 и 2 $\left(\frac{4}{3}<\frac{3}{2}\right.$, $\left.\left(\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{16}{9}>\frac{3}{2}\right)$, и мы полагаем $z=1+\frac{1}{u}$; уравнение (6) преобразуется к виду

$$\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}}=\frac{3}{2}, \quad \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}}=\frac{9}{8},$$

откуда

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{u}=\frac{4}{3}. \tag{7}$$

Здесь u заключается уже между 2 и 3 $\left(\left(\frac{9}{8}\right)^{2}=\frac{81}{64}<\frac{4}{3}\right.$, $\left.\left(\frac{9}{8}\right)^{3}=\frac{729}{512}>\frac{4}{3}\right)$, поэтому делаем подстановку $u=2+\frac{1}{v}$, где снова $v>1$. Для v из (7) получаем

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{2}\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{v}}=\frac{4}{3} \quad \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{v}}=\frac{256}{243},$$

или

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{v}=\frac{9}{8}. \tag{8}$$

Дальше вычисления легче вести с таблицами десятичных логарифмов. Логарифмируя (8), находим

$$v\,[\lg 256-\lg 243]=\lg 9-\lg 8,$$

или, используя таблицы десятичных логарифмов,

$$v\,[2{,}4082 - 2{,}3856] = 0{,}9542 - 0{,}9031,$$

откуда

$$0{,}0226v = 0{,}0511.$$

Ясно, что v заключено между 2 и 3. Можно было бы продолжать вычисления неограниченно, но мы остановимся на этом. В результате мы получим

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{u}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{v}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}};$$

это и дает нам первые члены искомой цепной дроби.

Соответствующие подходящие дроби имеют следующий вид:

$$\frac{1}{1} = 1; \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{3}{5}; \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = \frac{7}{12}.$$

Первые две подходящие дроби явно слишком грубы. Третья, $\frac{k}{m} = \frac{3}{5} = 0{,}600$, дает уже сравнительно небольшую ошибку, 0,015, по сравнению с интересующей нас величиной $\lg_2 \frac{3}{2} = 0{,}585$; но эта ошибка все же превосходит желательную 0,004 в четыре раза. Кроме того, если мы рассмотрим соответствующую шкалу из чисел, кратных $^1/_5$, т. е. из чисел $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$, $^4/_5$, 1, то мы увидим, что некоторые интересующие нас числа, именно $\lg_2 \frac{5}{3} = 0{,}727$ и $\lg_2 \frac{9}{8} = 0{,}169$, лежат далеко от ее делений.

Переходим к последнему приближению, $\frac{k}{m} = \frac{7}{12} = 0{,}583$. Оно уже достаточно близко к искомому 0,585, ошибка в 0,002 составляет половину допустимой. Соответствующая музыкальная шкала строится на логарифмической оси делением отрезка длины 1 на 12 равных частей точками

деления:

$$\frac{1}{12}=0{,}083,\quad \frac{2}{12}=0{,}167,\quad \frac{3}{12}=0{,}250,\quad \frac{4}{12}=0{,}333,$$
$$\frac{5}{12}=0{,}418,\quad \frac{6}{12}=0{,}500,\quad \frac{7}{12}=0{,}583,\quad \frac{8}{12}=0{,}667,$$
$$\frac{9}{12}=0{,}750,\quad \frac{10}{12}=0{,}833,\quad \frac{11}{12}=0{,}917,\quad \frac{12}{12}=1{,}000,$$

седьмая из которых весьма близка к квинте.

Мы видим, что и интересующие нас значения $\lg_2 \frac{4}{3}=0{,}416$, $\lg_2 \frac{5}{3}=0{,}737$, $\lg_2 \frac{5}{4}=0{,}323$, $\lg_2 \frac{9}{8}=0{,}169$, $\lg_2 \frac{15}{8}=0{,}908$ попадают близко к точкам шкалы (рис. 3), хотя и не с такой точностью, как $\lg_2 \frac{3}{2}$.

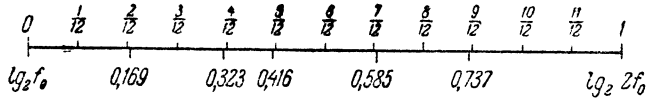

Рис. 3.

Таким образом, именно двенадцатиступенная музыкальная шкала успешно решает наши задачи.

Теперь мы в состоянии полностью объяснить закономерности частот октавы. Во-первых, мы фиксируем *двенадцатиступенную* лестницу тем условием, что отношение соседних частот, большей к меньшей, постоянно и равно $\sqrt[12]{2}$.

Соответствующий наименьший звуковой интервал называют *полутоном*; интервал из двух соседних полутонов назы-

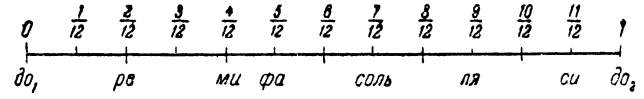

Рис. 4.

вается *тоном* (не путать *тон* — интервал и *тон* — звук фиксированной высоты). Вся октава разделяется на шесть тонов или 12 полутонов. Основные частоты, входящие в октаву, получаются небольшим изменением частот f_1, f_2, ..., показанных на рис. 3, так что вместо звука частоты f_1 рассматривается (рис. 4) ближайшая точная ступенька $\frac{2}{12}$, вместо

f_2 — точная ступенька $\frac{4}{12}$ и т. д. Если начальный звук октавы есть *до*, то следующий основной звук, отстоящий на один тон, называется *ре*; звук, расположенный еще одним тоном дальше, называется *ми*; следующий, на полутон выше, называется *фа*. Эти четыре основных звука образуют так называемый *тетрахорд* («четыре струны»). Во второй половине октавы имеется второй тетрахорд, тождественный с первым в смысле равенства отношений соответствующих частот; он начинается с звука *соль*, соответствующего частоте $\sim\frac{3}{2}f_0$, далее через тон идет звук, который называется *ля*; за ним, еще через тон; звук *си*; завершается тетрахорд через полутон звуком $до_2$, октавным повторением нижнего $до_1$. Именно эти частоты фигурируют в первой октаве, которую мы рассмотрели вначале. Действительно, двоичные логарифмы частот, указанных в таблице, следующие:

Тон	$до_1$	$ре_1$	$ми_1$	$фа_1$	$соль_1$	$ля_1$	$си_1$	$до_2$
f — частота в герцах	262	294	330	349	392	440	494	523
$\lg_2 f$	8,031	8,198	8,365	8,448	8,615	8,781	8,948	9,031
$\lg_2 \frac{f}{f_0} = \lg_2 f - \lg_2 f_0$	0	0,167	0,334	0,417	0,584	0,750	0,917	1,000

Мы видим, что разности логарифмов — как раз те самые числа, которые фигурировали в нашей музыкальной шкале для основных звуков. Таким образом, структура первой октавы выяснена.

Кроме семи основных звуков, в октаве имеются еще пять вспомогательных звуков, в совокупности с первыми образующие полную двенадцатиступенную шкалу. Они обозначаются с помощью соседних основных звуков с добавлением слова «*диез*» или «*бемоль*», что означает на полутон выше или ниже. Так, звук полутоном выше *до* обозначается *до диез* или *ре бемоль*. Эти пять дополнительных звуков получаются с помощью пяти черных клавиш первой октавы (рис. 2).

Если мелодия играется только на основных звуках гаммы, т. е. с помощью белых клавиш, черные клавиши не участвуют (например, в мелодии «чижика», начиная с тона *ми*). Но если мы желаем перенести мелодию, например на полутон выше, придется использовать и черные клавиши, так как второй звук мелодии «*до*» должен перейти в «*ре бемоль*», который расположен полутоном выше «*до*».

«Мелодия» из основных звуков *до* — (тон) — *ре* — (тон) — *ми* — (полутон) — *фа* — (тон) — *соль* — (тон) — *ля* — (тон) — *си* — (полутон) — *до* образует, как говорят, натуральную гамму *до мажор*. Перенося эту мелодию с сохранением интервалов кверху на различные расстояния в пределах октавы, мы можем получить еще 11 гамм, в названиях которых на первом месте ставится название первой ноты гаммы, а на втором — слово «*мажор*», указывающее на интервальный состав мелодии (тон — тон — полутон — тон — тон — тон — полутон). Например, при переносе гаммы *до мажор* на тон вверх получаем гамму *ре мажор*, состоящую из звуков *ре* — (тон) — *ми* — (тон) — *фа диез* — (полутон) — *соль* — (тон) — *ля* — (тон) — *си* — (тон) — *до диез* — (полутон) — *ре*.

Существует еще несколько гамм также из семи ступеней, но с иным соотношением интервалов. Так, «натуральная гамма *до минор*» состоит из звуков *до, ре, ми бемоль, фа, соль, ля бемоль, си бемоль, до* с интервальным составом тон — полутон — тон — тон — полутон — тон — тон. Основные три звука до мажорной гаммы *до — ми — соль* — это именно те звуки, которые входят в состав полного звучания струны *до* с точностью до октавных перемещений ($соль_2$ — тройная частота по отношению к $до_1$, $ми_3$ — пятикратная). Может быть, поэтому это трезвучие воспринимается так устойчиво и определенно. Основные три звука до минорной гаммы — *до — ми бемоль — соль* получаются понижением на полутон среднего из звуков мажорного трезвучия, вследствие чего возникает скрытый диссонанс между звуком *ми бемоль* и звуком $ми_3$, входящим в состав полного звучания струны $до_1$; может быть, этим объясняется особый «минорный» колорит минорного трезвучия. Классические музыкальные произведения построены на той или иной мажорной или минорной гамме, поэтому к их названиям часто присоединяется соответствующее указание «баллада Шопена соль минор» или «полонез ля бемоль мажор».

Создание логарифмически равномерной двенадцатитоновой музыкальной шкалы явилось итогом длительного развития

музыки и математики. Естественно, что она не могла появиться раньше создания алгебры иррациональных величин и логарифмов, а всем этим арсеналом математических средств ученые стали свободно владеть лишь в XVII веке. А около 1700 года немецкий ученый и музыкант Андреас Веркмейстер предложил описанную здесь шкалу и изготовил фортепиано, настроенное в соответствии с ней. До того времени музыкальные инструменты настраивались по принципу чистых интервалов (квинт, терций и др.), что неизбежно приводило к затруднениям в использовании других тональностей и к шероховатостям в модуляциях (переходах из одной тональности в другую) и тем ставило пределы развитию музыки. Далеко не все музыканты сразу приняли шкалу Веркмейстера; например, известный французский философ и музыкант Дидро был ее противником; он считал, что шкала без чистых интервалов не может лежать в основе музыки. Но крупнейший немецкий композитор XVIII века Иоганн Себастьян Бах делом доказал жизнеспособность новой системы; он сочинил два тома музыкальных произведений под общим названием «Хорошо темперированный клавир» (1722—1744). Каждый из этих томов содержал по 24 пьесы (прелюдии и фуги): по одной на каждую из 12 мажорных и 12 минорных тональностей. Сочинения Баха составили эпоху в развитии новой музыки; все последующие композиторы создавали свою музыку в этой системе. К настоящему времени возможности ее представляются все еще неисчерпаемыми. Искажения чистых «народных» интервалов в шкале Веркмейстера заметны только опытному уху, и наличие их с лихвой окупается свободой выбора тональностей и естественностью модуляций. В нашем веке появились предложения об увеличении числа ступеней в октаве до 24, 48 или 53 с тем, чтобы получить в пределах октавы интервалы, более близкие к чистым, и даже были изготовлены экспериментальные инструменты, но в музыкальную практику они не вошли.

В заключение отметим еще один факт, который музыкальной наукой пока еще теоретически не объяснен. Согласно нашему построению все 12 мажорных, равно как и все 12 минорных тональностей должны быть тождественны друг с другом по звучанию. Тем не менее музыканты считают, что тональности обладают и индивидуальными качествами. Так, например, считается, что *до мажор* характерен для светлого, солнечного, спокойного настроения (соната Бетховена «Аврора»), *ми мажор* — для взволнованного, страстно-

напряженного переживания (многие произведения Листа, романс «День ли царит» Чайковского); *фа диез мажор* — для радостно возвышенных ощущений («Весной» Грига); *до минор* — для мужественной печали («Похоронный марш» из Героической симфонии Бетховена); *ми бемоль минор* — для глубоко трагических состояний (романс Полины из «Пиковой Дамы» Чайковского). Пока еще не выяснено, отражаются ли в такого рода суждениях какие-либо объективные закономерности, или же мы имеем дело лишь с устоявшейся традицией. Возможно, впрочем, что процесс настройки музыкальных инструментов в силу особенностей слуха приводит фактически не к равномерным, несколько жестким, а к слегка смягченным интервалам музыкальной шкалы, так что в действительности, например, отношение частот для интервала *до — соль* не вполне совпадает с аналогичным отношением для интервала *ми — си*, как следовало бы при идеальной настройке. Во всяком случае, наука не стоит на месте и раньше или позже придет к объяснению и этой и других необъясненных еще закономерностей музыки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Гельмгольц, Учение о слуховых ощущениях, 1875.
2. Л. Г. Немировский, Акустика физическая, физиологическая и музыкальная, М.-П., 1923.
3. Музыкальная акустика, под ред. проф. Н. А. Гарбузова, Музгиз, 1940 и 1954.

1545/13
0.20

Цена 3 коп.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. А. И. Маркушевич. Возвратные последовательности.
Вып. 2. И. П. Натансон. Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. И. С. Сомнинский. Метод математической индукции.
Вып. 4. А. И. Маркушевич. Замечательные кривые.
Вып. 5. П. П. Коровкин. Неравенства.
Вып. 6. Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи.
Вып. 7. А. Г. Курош. Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. А. О. Гельфонд. Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. А. И. Маркушевич. Площади и логарифмы.
Вып. 10. А. С. Смогоржевский. Метод координат.
Вып. 11. Я. С. Дубнов. Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. И. П. Натансон. Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. А. И. Маркушевич. Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. А. И. Фетисов. О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. И. Р. Шафаревич. О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. В. Г. Шервatов. Гиперболические функции.
Вып. 17. В. Г. Болтянский. Что такое дифференцирование?
Вып. 18. Г. М. Миракьян. Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. Л. А. Люстерник. Кратчайшие линии.
Вып. 20. А. М. Лопшиц. Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. Л. И. Головина и И. М. Яглом. Индукция в геометрии.
Вып. 22. В. Г. Болтянский. Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. А. С. Смогоржевский. О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков. Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. А. С. Смогоржевский. Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. Б. А. Трахтенброт. Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. В. А. Успенский. Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев. Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. А. Н. Костовский. Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. Г. Е. Шилов. Как строить графики.
Вып. 31. А. Г. Дорфман. Оптика конических сечений.
Вып. 32. Е. С. Вентцель. Элементы теории игр.
Вып. 33. А. С. Барсов. Что такое линейное программирование?
Вып. 34. Б. Е. Маргулис. Системы линейных уравнений.
Вып. 35. Н. Я. Виленкин. Метод последовательных приближений.
Вып. 36. В. Г. Болтянский. Огибающая.
Вып. 37. Г. Е. Шилов. Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).